

חשבון דיפרנציאלי ואינטגרלי 2 א'

סמסטר ב', תשפ"ה, מועד ב'

19 בספטמבר, 2025

מרצים: יעקב יעקובוב ויעל קרשון

- משך הבחינה 3 שעות.
- בבחינה 4 שאלות, בכל אחת תוכלו לקבל עד 27 נקודות. הניקוד המירבי בבחינה הוא 100 נקודות.
- אנא רשמו את הפתרונות במקום המיועד להם בטופס הבחינה. ניתן לרשום "המשך בעמ'.." ולהמשיך בעמודים שבסוף הבחינה: השתמשו בעמוד נפרד לכל שאלה, וסמנו את מספר השאלה בראש העמוד.
- ניתן לבקש מחברת נפרדת לטיוטה; מחברת זו לא תיבדק.
- אנא נסחו כל טענה שעליה אתם מסתמכים.
- כתיבה לא ברורה או לא רלוונטית עשויה להביא להורדת ניקוד.
- בכל שאלה או סעיף, התגובה "אינני יודעת" (ללא תוספת) תזכה אתכם ב- 20% מערך השאלה או הסעיף.
- בכל שאלה, בכל סעיף מותר להשתמש בתוצאות שהתבקשתם להוכיח בסעיפים הקודמים, גם אם לא פתרתם את הסעיפים הקודמים.
- אסורה החזקת טלפון סלולרי או כל מכשיר אלקטרוני אחר במהלך הבחינה. אין להשתמש במחשבון או בכל חומר עזר שהוא, פרט לדף הנוסחאות המצורף.

בהצלחה!

שאלה 1:

(א) (13 נקודות.) תהי $f(x) := \int_0^{\sin(3x)} \cos\left(\frac{\pi}{4} + |t|\right) dt$ הראו ש- f דיפרנציאבילית בנקודה $x = 0$, וחשבו את $f'(0)$.

(ב) (14 נקודות.) השתמשו בסכומי רימן או בסכומי דרבו כדי לחשב את הגבול

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + \dots + \frac{1}{2n} \right).$$

פתרון שאלה 1:

המשך פתרון שאלה 1:

שאלה 2:

(א) (12 נקודות). הוכיחו ש- $\int_0^{\pi/2} \exp(\cos^2 x) dx = \int_{\pi/2}^{\pi} \exp(\sin^2 x) dx$.

(ב) (15 נקודות). קבעו מהם הערכים החיוביים של α שעבורם האינטגרל הלא אמיתי $\int_0^\infty \sin(x^{-\alpha}) dx$ מתכנס. הסבירו.

(אתם לא מתבקשים לחשב את האינטגרלים הללו.)

פתרון שאלה 2:

המשך פתרון שאלה 2:

שאלה 3:

(א) (14 נקודות.) תהי $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ סדרה כך שהטור $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n| \cdot n$ מתכנס. הוכיחו שהטור

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n \sin(nx)$$

מתכנס לפונקציה גזירה בקטע $[-\pi, \pi]$.

(ב) (13 נקודות.) חשבו: $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{2^n}$. (רמז: התחילו עם הטור הגאומטרי $\sum_{n=0}^{\infty} x^n$.)

פתרון שאלה 3:

המשך פתרון שאלה 3:

שאלה 4: לכל $u, v \in \mathbb{R}$, נגדיר:

$$\rho(u, v) := \frac{|u - v|}{\sqrt{1 + |u|^2} \cdot \sqrt{1 + |v|^2}}.$$

זוהי מטריקה על הקבוצה $\mathbb{R}$ (אתם לא נדרשים להוכיח זאת). הוכיחו:

(א) (7 נקודות). לכל סדרה $(x_n)_{n=1}^\infty$ של מספרים ממשיים, אם הסדרה מתכנסת במובן הרגיל לגבול x_0 (כמו בחדו"א 1), אז היא מתכנסת במרחב המטרי $(\mathbb{R}, \rho)$ לאותו גבול, x_0 .

(ב) (10 נקודות). לכל סדרה $(x_n)_{n=1}^\infty$ של מספרים ממשיים, אם סדרת הערכים המוחלטים $(|x_n|)_{n=1}^\infty$ מתבדרת ל- ∞ (כמו בחדו"א 1), אז $(x_n)_{n=1}^\infty$ היא סדרת קושי במרחב המטרי $(\mathbb{R}, \rho)$.

(ג) (10 נקודות). לכל סדרה של מספרים ממשיים יש תת-סדרה שהיא סדרת קושי במרחב המטרי $(\mathbb{R}, \rho)$.

פתרון שאלה 4:

המשך פתרון שאלה 4:

המשך פתרון שאלה _____:

המשך פתרון שאלה _____:

המשך פתרון שאלה _____:

המשך פתרון שאלה _____:

המשך פתרון שאלה _____: